Matematica e sincerità

di Marco Li Calzi

Paradossi e puzzle logici

Probabilmente, il più ovvio collegamento fra matematica e sincerità è il paradosso del mentitore, che consiste nell'enunciare una proposizione autonegante come "Questa frase è falsa". La sua prima formulazione è popolarmente attribuita a Epimenide di Creta (VI secolo a.C.) che avrebbe affermato la proposizione che (tutti) "i cretesi sono bugiardi", anche se in realtà l'esistenza di almeno un cretese che dice la verità dissolve il paradosso. Una formulazione concisa e formalmente corretta si deve al matematico Philippe Jourdain: "L'affermazione seguente è vera. L'affermazione precedente è falsa".

Tuttavia, qui non intendiamo occuparci di paradossi logici. A chi fosse interessato raccomandiamo il breve compendio, che include un gustoso florilegio di successive formulazioni, pubblicato nel quinto capitolo di [1]. Vi si possono leggere anche alcune divertenti storielle riconducibili al paradosso del mentitore. Fra queste, non resistiamo alla tentazione di riassumere la brillante versione offerta nel Don Chisciotte (II, 51) di Miguel de Cervantes.

Nell'isola di Barataria c'era un ponte che la legge consentiva di attraversare solo dopo aver giurato sulla ragione per cui si voleva farlo: chi mentiva veniva impiccato, mentre chi diceva la verità poteva passare sano e salvo. Avvenne dunque che un giorno si presentò un uomo, affermando di voler attraversare il ponte solo per essere impiccato in base alla legge. Il caso giunse fino a Sancio Panza, governatore dell'isola, che in prima istanza proferì il giudizio di lasciar passare la parte dell'uomo che aveva detto la verità e di impiccare quella che aveva mentito (di fronte alle perplessità suscitate da questa sentenza, Sancio modificò la sentenza disponendo di lasciar passare l'uomo perché le ragioni pro e contro si trovavano in ugual bilancia ed è "sempre meglio fare del bene che del male").

Un'altra area di collegamento fra matematica e sincerità si ritrova fra i puzzle logici, in particolare quelli ideati e raccolti da Smullyan in [2]. C'è un'isola dove tutti gli abitanti sono cavalieri o furfanti. Un cavaliere è una persona che dice sempre la verità; un furfante è una persona che mente sempre. La natura di ciascuna persona è immutabile, anche se si racconta di un indigeno capace di trasmutare la sua che fuggì a vivere in una lontana penisola: impossibilitati a sapere se mentisse o dicesse la verità, i suoi concittadini lo fraintendevano sempre.

I puzzle di Smullyan chiedono di dedurre le implicazioni delle affermazioni di uno o più isolani. Ecco un esempio tratto dal Progetto Olimpiadi della Matematica (Roma, 29 marzo 2001). Fra tre abitanti dell'isola si svolge il seguente dialogo. Tizio dice: "*Almeno* uno di noi è un furfante"; Caio aggiunge: "*Non più di* uno di noi è un furfante"; Sempronio chiosa: "*Esattamente* uno di noi è un furfante". Identificate la natura degli abitanti (la risposta è in fondo a questa sezione).

Uno dei puzzle più noti è probabilmente il seguente, che ha anche ispirato una scena nel film *Labyrinth* del 1986. Giungete a un bivio dove staziona un indigeno. Non sapete se sia un cavaliere o un furfante. Una delle due strade conduce al castello, l'altra a un covo di briganti. Potete chiedere una sola domanda, a cui l'indigeno deve rispondere con un "sì" o con un "no". Che cosa dovete domandare per trovare la strada giusta?

La risposta al primo puzzle è che Tizio è un cavaliere e gli altri due sono furfanti. Lasciamo invece aperto il secondo puzzle, avvertendo il lettore che esso ammette più soluzioni.

Sincerità e interazioni economiche

In realtà, naturalmente, le persone non sono né cavalieri né furfanti. Esse possono scegliere consapevolmente se e quando mentire. Anche se la sincerità è un valore etico condiviso da tempo immemorabile (Esodo XX, 16: "Ottavo: non dire falsa testimonianza"), questo non impedisce che la gente cerchi frequentemente di trarre profitto ricorrendo a menzogne o false dichiarazioni.

La possibilità che i membri della società mentano rende le interazioni economiche e sociali molto più complicate. Gli esempi sono tantissimi. Ci sono spacciatori di monete false, evasori fiscali, manipolatori dei listini azionari, vincitori di appalti pubblici o privati che gonfiano i costi. Moltissime truffe sono riconducibili ad abili manipolazioni della verità. È possibile distorcere i comportamenti elettorali persino in sistemi genuinamente democratici [3]. Come si può immaginare, il rischio associato a queste o consimili forme di mendacio tende a degradare la qualità dei rapporti economici o sociali.

I due modi principali per contrastare questi effetti perniciosi sono lo smascheramento delle menzogne e la loro prevenzione. La differenza fra queste due attività si riassume in due avverbi di tempo: *ex post* oppure *ex ante*. Una menzogna può essere scoperta soltanto *dopo* che è stata pronunciata. Invece, l'attività di prevenzione va intrapresa *prima* e ha successo solo se la menzogna è evitata (o resa meno probabile).

Il resto di questo lavoro è dedicato a illustrare in che modo la matematica possa contribuire a queste due importanti attività. Nella sezione 3, raccontiamo un caso eclatante in cui la matematica è stata usata per scoprire se le persone mentono (*post factum*). Nella sezione 4, invece, mostriamo in che modo si può usare la matematica per indurre le persone a non mentire (*ante factum*).

La scoperta delle bugie

È bene far subito una dichiarazione di umiltà. La matematica da sola non è in grado di scoprire le bugie. Anche se è uno strumento potente, bisogna sapere in che direzione puntarlo. Prendere bene la mira può richiedere fantasia, cultura storica, un po' d'improvvisazione, magari fortuna. Ecco perché la storia che raccontiamo parte da lontano.

È un fatto curioso che le denominazioni degli spiccioli nell'area dell'euro e negli U.S.A. sono diverse. I tagli delle monete denominate in euro sono otto: 1¢, 2¢, 5¢, 10¢, 20¢, 50¢, €1, €2. Invece, quelli delle monete denominate in dollari sono sei: 1¢, 5¢, 10¢, 25¢, 50¢, $1.

La curiosità aumenta se si considera che ci sono alcuni studi matematici che cercano di determinare quale sia la migliore combinazione di tagli per minimizzare il numero medio di monete necessarie per completare una transazione [4]. Per esempio, nell'ipotesi di uniforme distribuzione, Shallit [5] ha calcolato che il numero medio di monete necessario per una transazione negli U.S.A. è di 4,7 e ha (un po' scherzosamente) suggerito l'introduzione di una moneta da 18¢, che ridurrebbe questo valore a 3,18. Nel caso dell'euro, il numero medio di monete utilizzate per una transazione risulta invece 4,6 che potrebbe essere ridotto a 3,92 con l'introduzione di una moneta da 1,33¢ o da 1,37¢.

Il sistema di denominazioni dell'euro (così come quello in vigore in Cina) segue uno schema ricorrente basato sulla progressione 1-2-5. In base a ciò, possiamo azzardare la previsione che il taglio della prossima nuova moneta in euro sarà €5. Il sistema del dollaro, invece, appare meno regolare. Fra l'altro, guardando indietro al periodo fra il 1792 e il 1935, gli Stati Uniti hanno emesso altre monete con tagli assai diversi: 0,5¢, 2¢, 3¢, 20¢, $2,50 (Quarter Eagle), $3, $5 (Half Eagle), $10 (Eagle), $20 (Double Eagle), e $50 (Half Union).

Perché il sistema delle denominazioni del dollaro americano è così bizzarro? La storia inizia nel 1497, quando l'impero spagnolo inizio a coniare una nuova moneta d'argento chiamata *peso*. Il suo uso si diffuse alle colonie spagnole d'oltreoceano: meglio noto come *dollaro spagnolo*, il peso ebbe corso corrente negli U.S.A. fino al 1857 e ispirò il dollaro americano. Dopo che il Coinage Act ebbe istituito la zecca degli U.S.A. nel 1792, il dollaro spagnolo continuò a lungo a essere preferito al dollaro americano perché era più pesante e utilizzava un argento di qualità migliore.

Ai fini della nostra storia, la peculiarità più importante del dollaro spagnolo è che esso valeva otto *reales*. Questa suddivisione in ottavi oggi suona bizzarra, ma è una conseguenza naturale del fatto che i dollari erano spesso letteralmente tagliati in otto parti (o in quattro quarti) per ottenere le denominazioni più piccole. Non a caso il nome più comune del dollaro spagnolo era *pezzo da otto*, un termine che l'immaginario comune oggi associa ai pirati. Per esempio, nell'*Isola del tesoro* di R.L. Stevenson il pappagallo di Long John Silver è addestrato a gridare `"pezzi da otto!"; i pezzi da otto compaiono nel film *Pirati dei Caraibi: Ai confini del mondo* del 2007 o nella serie di videogiochi *Monkey Island*. I 25¢ del dollaro americano (invece dei 20¢ dell'euro) non sono altro che quarti di dollaro: una vestigia del tempo dei "pezzi da otto".

Se si deve tagliare una moneta per ricavare gli spiccioli, c'è sempre la tentazione di limare via e mettere da parte un po' d'argento. Questo rende molto probabile che ci fossero in circolazione *reales* più leggeri del dovuto e ci riporta alla mente un'altra famiglia di puzzle logici [6]. Il problema tipico consiste nel determinare per confronto quali monete siano false, ricorrendo al numero minimo di pesate su una stadera (o bilancia a bracci).

Una versione classica è la seguente. Ci sono 27 monete, di cui una è falsa e pesa *meno* di tutte le altre. Trovate la moneta falsa usando soltanto tre pesate. La soluzione prescrive di dividere le 27 monete in tre gruppi da 9 monete ciascuno. Con la prima pesata si confrontano due gruppi e si determina il gruppo di 9 monete che contiene la moneta falsa (se i due gruppi pesano uguali, allora questa è nel terzo gruppo). Successivamente si dividono queste 9 monete in tre nuovi gruppi da 3 monete e con una seconda pesata si determina in quale gruppo sia la moneta falsa. Infine con la terza pesata si determina quale delle tre monete rimaste sia falsa. Una variante più difficile [7] chiede di trovare la moneta falsa in un gruppo di 12 monete, di cui una è falsa e ha un peso *diverso* (non necessariamente inferiore) da tutte le altre.

Negli anni '90, il NASDAQ era uno dei tre principali mercati azionari negli U.S.A. e in particolare il più importante per la compravendita di azioni di società tecnologiche come Apple, Intel, e Microsoft; oggi vi sono quotate anche imprese di più recente fondazione come Amazon, eBay, Google, Yahoo!

In quegli anni, i prezzi delle azioni in U.S.A. erano quotati in ottavi di dollaro: per esempio, il prezzo di un'azione poteva essere \$7,125 o \$9,375 ma non erano ammesse quotazioni decimali come \$7,13 o \$9,38. Si trattava di un'altra vestigia del tempo dei "pezzi da otto", sebbene questi fossero andati fuori corso da oltre 140 anni. Ma, come vedremo, potrebbe essere stata la chiave per la più grande truffa del mondo.

Bisogna sapere che nei mercati azionari per ogni titolo sono pubblicati due prezzi: uno si applica a chi desidera comprare e l'altro a chi desidera vendere. In memoria dei tempi (secolo XVI) in cui gli acquirenti offrivano denaro mentre i venditori cedevano la lettera (cioè un documento cartaceo), questi due prezzi si chiamano ancora oggi *denaro* e *lettera*. Dunque, il prezzo di un'azione si quota come \$12,50 (denaro) e \$12,75 (lettera). Il denaro è il prezzo più alto offerto dai potenziali acquirenti e quindi il prezzo migliore a cui si può vendere. Simmetricamente, la lettera è il prezzo migliore a cui si può comprare. Ovviamente, il prezzo denaro è sempre inferiore al prezzo lettera.

La differenza fra il denaro e la lettera si chiama *spread*. Più piccolo è lo spread, meno costose sono le transazioni di borsa perché minore è il costo di comprare e rivendere un titolo. I mercati azionari risultano più efficienti se riescono a mantenere spread piccoli. Il Nasdaq gode giustamente di buona reputazione in questo campo, perché sfrutta il meccanismo della concorrenza per ridurre gli spread.

Per "fare il prezzo", infatti, il Nasdaq si basa su operatori professionali (i *dealer*) che sono disposti a comprare o vendere titoli. I dealer si fanno concorrenza sui prezzi per attirare i clienti. Per esempio, se il dealer A offre 12,375 (denaro) e il dealer B quota 12,250 (denaro), un cliente preferisce vendere al prezzo di 12,375 ad A perché spunta un prezzo migliore. Questo spinge B a cercare di alzare il prezzo a cui è disposto a comprare e in questo modo la concorrenza fra i dealers fa tendere i prezzi verso lo spread minimo. Naturalmente, dato che il prezzo denaro è sempre inferiore al prezzo lettera, la differenza fra i due non può essere inferiore all'unità di conto dei prezzi. Quindi, se il Nasdaq offre quotazioni in ottavi di dollaro, lo spread minimo su quel mercato è almeno 1/8=0,125¢.

Nel 1994, due studiosi [8] resero evidente a tutti che per 70 fra i 100 titoli più importanti del Nasdaq non erano quasi mai disponibili quotazioni basate sugli ottavi "dispari"; in altre parole, i prezzi quotati evitavano di terminare in 0,125 o 0,375 o 0,625 o 0,875. Questo potrebbe sembrare un accadimento irrilevante, dovuto a una naturale inclinazione umana verso l'adozione di quotazioni basate sul sistema dei quarti. Tuttavia, senza l'uso di ottavi "dispari", lo spread effettivo raddoppia da \$0,125 a \$0,25. Pertanto, se i prezzi virano da un sistema basato sugli ottavi di dollaro a un sistema basato sui quarti, i dealer raddoppiano i loro profitti a spese degli investitori!

Con l'uso di tecniche statistiche, i due studiosi riuscirono a eliminare come non plausibile qualsiasi spiegazione per l'assenza degli ottavi dispari dai prezzi che non fosse quella ovvia: doveva esserci un accordo collusivo fra i dealer per evitare di farsi concorrenza sugli ottavi dispari! La matematica aveva scoperchiato una bugia che ogni giorno fruttava loro milioni di dollari di profitto.

Il resto della storia illustra il vecchio adagio che le bugie hanno le gambe corte (si attribuisce a Mark Twain la chiosa che riescono lo stesso a fare il giro del mondo prima che la verità si metta le scarpe). Il 26 e 27 maggio 1994, i quotidiani nazionali divulgano la notizia che l'articolo ha passato il vaglio della scienza ed è stato accettato per la pubblicazione sul *Journal of Finance*, la più prestigiosa rivista scientifica del settore. Nel giro di due giorni, i dealer cominciano a offrire anche quotazioni basate su ottavi dispari. Nel 2000, un decreto della Securities and Exchange Commission (l'authority preposta alla sorveglianza dei mercati azionari) ha ingiunto al Nasdaq di abbandonare ufficialmente i "pezzi da otto" e di introdurre l'uso delle quotazioni decimali. Questa sanzione applica elegantemente la legge del taglione: con le quotazioni decimali lo spread minimo è sceso da 0,125 a 0,10 e quindi i dealer hanno perso il 20% dei profitti legittimamente consentiti dal precedente regime basato sugli ottavi.

Naturalmente, ci sono moltissimi altri casi in cui la matematica è stata usata per smascherare una bugia. Per chi volesse vedere altri esempi, consiglio la lettura del primo capitolo in [9] e in particolare la vicenda dell'indagine condotta nella scuola pubblica di Chicago che ha portato alla luce che circa il 4% dei docenti manipolava i risultati dei test nazionali a risposta multipla a cui erano sottoposti i loro studenti. Un'altra applicazione affascinante fa un uso creativo della cosiddetta legge di Benford per costruire un algoritmo in grado di individuare possibili evasori fiscali [10]. La legge di Benford è un principio empirico secondo il quale la frequenza delle cifre che compaiono in un elenco di dati tratti dalla vita reale tende a seguire una legge diversa dalla distribuzione uniforme [11].

La prevenzione delle bugie

Nel famoso episodio biblico del giudizio di Re Salomone (Primo libro dei Re, 3:16-28), due donne si contendono un bambino sostenendo entrambe di esserne la vera madre. Salomone deve decidere a chi assegnare il bambino. Per risolvere la sua incertezza, Salomone propone di tagliare in due il bambino e darne metà a ciascuna donna (ritorna in mente la sentenza di Sancio Panza a Barataria). La prima donna accetta l'offerta, mentre la seconda preferisce lasciare il bambino alla rivale. Salomone riconosce nella rinuncia della seconda donna la forza dell'amore materno e le assegna il bambino.

Da un punto di vista *post factum*, dobbiamo interpretare questo episodio come un successo per Salomone: il suo giudizio apparentemente bizzarro ottiene l'effetto voluto e la menzogna della falsa madre è scoperta. *Ex ante*, in realtà, dobbiamo ammettere che la celebrata reputazione di saggezza di Salomone ha corso un grosso rischio. Che cosa sarebbe successo se entrambe le donne avessero proposto di cedere il bambino alla rivale? Ovvero, per offrire un test più convincente, pensate che l'astuzia di Salomone funzionerebbe ancora se le due pretendenti avessero già letto la Bibbia? Prevenire le bugie richiede un approccio più prudente.

La teoria del *disegno dei meccanismi* studia problemi analoghi a quello affrontato da Salomone: sappiamo che cosa vorremmo fare (assegnare il bimbo alla vera madre), ma l'esito dipende da altri che possono mentire a proprio vantaggio (come la falsa madre che vuole il bimbo) e bisogna trovare un modo per non consentire a costoro di sviarci dall'azione migliore. Il compito della teoria è di aiutare il re a costruire una situazione in cui l'azione razionale di tutti gli agenti coinvolti conduca al risultato auspicato dal re nell'interesse di tutti. Si noti che facciamo due ipotesi: primo, gli agenti fanno scelte razionali; secondo, c'è un re (o, nel linguaggio più neutro degli economisti, un pianificatore sociale) che si prende cura di organizzare le cose. La prima ipotesi ci serve per prevedere che cosa faranno gli agenti e la seconda per valutare le conseguenze delle loro azioni.

Per illustrare come funziona il disegno dei meccanismi, torniamo al problema delle due donne che chiameremo Anna e Beth. Per rendere più semplice l'esposizione, seguiamo [12] e supponiamo noto che soltanto la vera madre è disposta a qualsiasi sacrificio per vedere riconosciuta la sua maternità. Per esempio, la vera madre è disposta ad accettare persino la schiavitù mentre non è così per la sua antagonista. Salomone deve scoprire chi sia la vera madre. (noi sappiamo che è Anna, ma non possiamo dirglielo).

Lo schema proposto nella Bibbia non funziona perché, se entrambe le donne forniscono la stessa risposta, Salomone finisce in un vicolo cieco: se onora la sua parola, deve uccidere il bambino; se non porta a termine la sua minaccia, perde la sua credibilità. Giacché non ci sono ragioni che impediscano a Beth di imitare quanto possa scegliere di fare Anna, è molto improbabile che il trucco di Salomone raggiunga il suo scopo.

Fortunatamente, sotto le nostre ipotesi possiamo proporre uno schema che funziona (il lettore potrebbe trovare utile disegnare un diagramma di flusso per riassumere quanto segue). Salomone chiede a una delle due donne: "Sei tu la madre?" Se questa risponde "no", assegna il bambino all'altra. Se la prima donna risponde "sì", riformula la stessa domanda alla seconda. Se questa risponde "no", il bambino va alla prima. Se entrambe le donne hanno risposto "sì", Salomone assegna il bambino alla seconda donna e, poiché è palese che una delle due ha mentito, le condanna entrambe alla schiavitù. Questa ultima disposizione può sembrare eccessiva perché punisce due persone per la colpa di uno ma, come vedremo, se le due donne sono razionali la punizione non è mai effettivamente somministrata. La minaccia della schiavitù agisce soltanto come deterrente credibile per la menzogna.

Vediamo come funziona lo schema. Salomone può interrogare per prima Anna oppure Beth. Poiché lui non sa che la vera madre è Anna, dobbiamo dimostrare che in entrambi i casi lo schema conduce le due donne a rivelare chi sia la vera madre. La robustezza dello schema è attestata dal fatto che la dimostrazione vale identica anche se il caso si dovesse ripresentare più volte.

Supponiamo che la prima donna a essere interrogata sia Anna. Alla domanda se sia lei la madre, Anna naturalmente risponde "sì". Successivamente Salomone rivolge la stessa domanda a Beth, che ha due opzioni: se risponde "no", il bambino va ad Anna; se risponde "sì", Beth ottiene il bambino ma finisce in schiavitù che è un sacrificio troppo grande per lei. Quindi Beth risponde "no" e Salomone può assegnare il bambino ad Anna.

Supponiamo adesso che la prima donna a essere interrogata sia Beth. Di nuovo, Beth ha due opzioni: può rispondere "sì" o "no. Per valutare che cosa sia meglio, deve prendere in considerazione come reagirà Anna. Se Beth risponde "sì", Salomone passerà a chiedere ad Anna se sia lei la madre e Anna risponderà "sì": in questo modo, il bambino sarà assegnato ad Anna ed entrambe finiranno in schiavitù (si noti che questo è l'esito peggiore per Beth). Se invece Beth risponde "no", il bambino sarà assegnato ad Anna ma Beth eviterà la schiavitù. Quindi Beth preferisce rispondere "no" e di nuovo Salomone può assegnare il bambino ad Anna.

La teoria del disegno dei meccanismi ha applicazioni nei campi più diversi. Per farcene un'idea, vediamo un esempio relativo alle aste. Le aste sono meccanismi concorrenziali per l'assegnazione di uno o più beni. Ce ne sono moltissime varianti, ma qui ci limitiamo a considerare il caso molto semplice delle aste in busta chiusa per un singolo bene.

Cristina ha messo all'asta un personal computer. Ci sono solo due potenziali compratori: Luca e Giulia. Le regole dell'asta sono le seguenti. Ciascun concorrente consegna la sua offerta in busta chiusa. Vince l'asta chi ha fatto l'offerta più alta (in caso di offerte uguali, il vincitore è deciso dal lancio di una moneta). Il vincitore paga l'offerta scritta nella sua busta.

Prendiamo il punto di vista di Luca, per il quale il computer vale 10: quanto deve offrire? Il problema non è facile. Da un lato, deve offrire meno di 10 perché altrimenti se vince non guadagna nulla. Dall'altro, non deve offrire troppo poco o altrimenti corre il rischio che Giulia gli porti via il computer: per esempio, se Luca offre 7 (puntando a un profitto di 10-7=3) e Giulia offre 8, Luca resta con le pive nel sacco. Se interpretiamo l'offerta di Luca come una dichiarazione di quanto sia disposto a pagare, possiamo dire che Luca sta cercando di mentire (pagare meno del suo valore) ma senza esagerare. Stabilire quale sia la menzogna migliore per Luca in queste situazioni è un problema complicato che qui non affrontiamo, anche se la sua soluzione è nota [13].

Cambiamo approccio e chiediamoci se esista uno schema d'asta diverso che renda la vita più facile per Luca (e simmetricamente per Giulia). Il modo più elegante per risolvere il problema di Luca è trovare uno schema che induce tutti i partecipanti all'asta a dire la verità. Se la cosa migliore è dire la verità, non occorre fare sforzi per cercare la bugia migliore.

La chiave per trovare lo schema è nascosta nelle due regole che definiscono l'asta: 1) vince l'asta chi ha fatto l'offerta più alta; 2) il vincitore paga la sua offerta. La prima regola decide chi vince; la seconda regola decide quanto deve pagare il vincitore. La prima regola spinge Luca a offrire molto, in modo da assicurarsi il computer; la seconda regola lo induce a mentire, in modo da non spendere troppo. L'idea semplice ma brillante di William Vickrey (premio Nobel per l'Economia nel 1996) è di generare un nuovo schema modificando la seconda regola, in modo da eliminare l'incentivo a mentire. La nuova regola è la seguente: 2bis) il vincitore paga l'offerta fatta dal suo concorrente.

L'asta definita dalle regole 1+2 si chiama *asta al primo prezzo*, perché il vincitore paga il prezzo più alto fra le due offerte. L'asta definita dalle regole 1+2bis si chiama invece *asta al secondo prezzo*, perché il vincitore paga il prezzo più basso. Si noti che in ogni caso la regola di determinazione del vincitore è la stessa. La sorprendente proprietà dell'asta di secondo prezzo è che conviene sempre dire la verità e fare un'offerta uguale al proprio valore.

Dimostriamolo. Bisogna far vedere che nell'asta di secondo prezzo Luca non trae nessun vantaggio dal fare un'offerta diversa dal suo valore di 10. Mostriamo prima che non conviene offrire di più; poi faremo vedere che non conviene neanche offrire di meno. Supponiamo che Luca mediti di offrire 10+K, con K>0. Se Giulia offre un valore A<10, Luca vince sia che offra 10 sia che offra 10+K e paga sempre A; quindi per Luca non fa differenza. Se Giulia offre un valore A>10+K, Luca perde sia che offra 10 sia che offra 10+K; quindi per Luca non fa differenza. Infine, se Giulia offre un valore 10<A<10+K, Luca perde se offre 10 e vince se offre 10+K; tuttavia, nel primo caso non paga nulla mentre nel secondo deve pagare A>10 e quindi ci rimette. Tirando le somme, nella migliore delle ipotesi offrire 10+K invece di 10 non fa differenza e nella peggiore conduce a una perdita (per brevità, lasciamo al lettore di verificare che questo resta vero anche per i due casi speciali in cui Giulia offre 10 o 10+K).

Adesso supponiamo che Luca mediti di offrire 10-K, con K>0. Come prima, se Giulia offre A<10-K o A>10, per Luca non c'è differenza. Invece, se Giulia offre un valore 10-K<A<10, Luca perde se offre 10-K e vince se offre 10. Nel primo caso Luca non paga e non ottiene nulla, mentre nel secondo ottiene il computer che per lui ha un valore di 10 e paga A<10 quindi ottiene un guadagno di 10-A>0. Come prima, nella migliore delle ipotesi offrire 10-K invece di 10 non fa differenza e nella peggiore conduce a un mancato guadagno.

Postilla

L'idea di scrivere questo lavoro è nata in occasione del conferimento del premio Nobel 2007 per l'Economia a Leonid Hurwicz, Eric. S Maskin e Roger B. Myerson "per aver costruito le fondamenta della teoria del disegno dei meccanismi", in cui gioca un ruolo importante la sincerità. Ciò nonostante, in qualche occasione l'ho presentato sotto il titolo "X, Lies, and Mathematics" sostenendo di avere tratto ispirazione dal film *Sex, Lies, and Videotape* uscito nel 1989. Era una bugia.

Bibliografia

[1] P. Odifreddi (2001) *C'era una volta un paradosso: Storie di illusioni e verità rovesciate*, Einaudi, Torino

[2] R. Smullyan (1981) *Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula e altri indovinelli logici*, Zanichelli, Torino

[3] M. Li Calzi (2009) Giochi da senatori, *Alice & Bob* 10, pp. 17-20

[4] L. van Hove e B. Heyndels (1996) On the optimal spacing of currency denominations, *European Journal of Operational Research* 90, pp. 547-552

[5] J.O. Shallit (2003) What this country needs is an 18-cent piece, *Mathematical Intelligencer* 25, pp. 20-23

[6] R.K. Guy e R.J. Nowakowski (1995) Coin-weighing problems, *American Mathematical Monthly* 102, pp. 164-167

[7] D. Eves (1946) Problem E712: The extended coin problem, *American Mathematical Monthly* 53, p. 156. Solutions by E.D. Schell e J. Rosenbaum, *American Mathematical Monthly* 54, pp. 46-48

[8] W.G. Christie e P.H. Schultz (1994) Why do NASDAQ market makers avoid odd-eighth quotes?, *Journal of Finance* 49, pp. 1813-1849

[9] S.D. Levitt e S.J. Dubner (2008) *Freakonomics: Il calcolo dell'incalcolabile*, Sperling & Kupfer, Milano

[10] M. Nigrini (1996), "A taxpayer compliance application of Benford's law", *Journal of the American Taxation Association* 18, pp. 72-91

[11] T.P. Hill (1995), "The significant-digit phenomenon", *American Mathematical Monthly* 102, pp. 322-327

[12] K. Binmore (2007), *Game theory: A very short introduction*, Oxford University Press, Oxford

[13] L. Parisio (1999) *Meccanismi d'asta*, Carocci, Roma